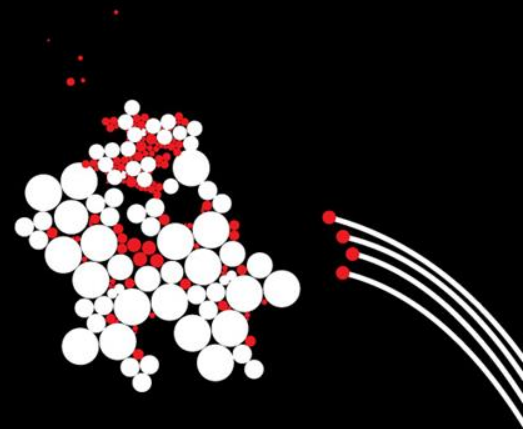
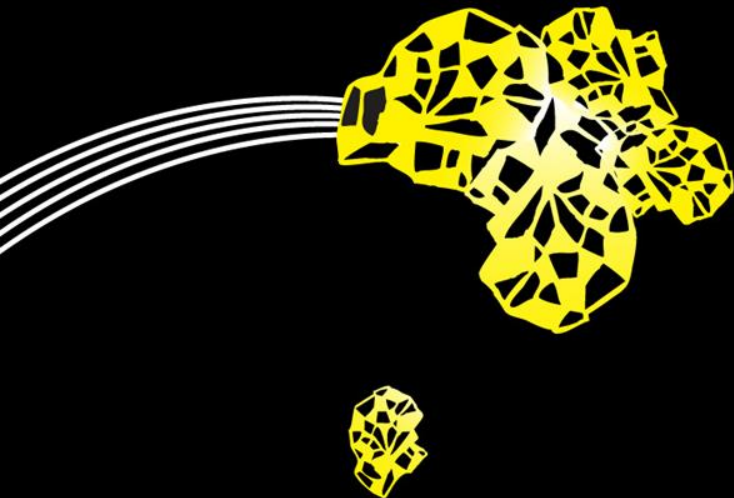


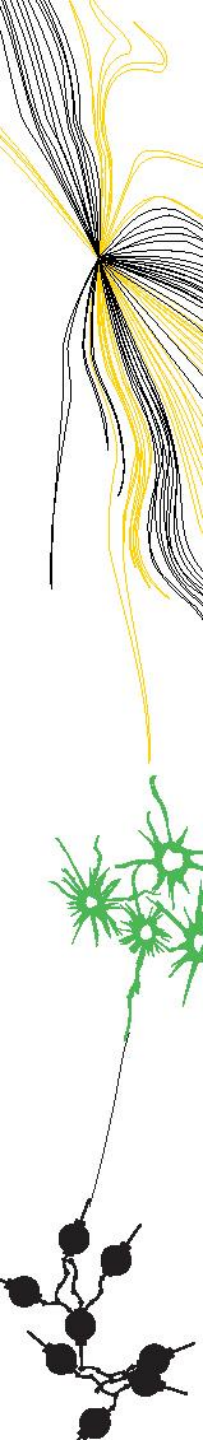
UNIVERSITEIT TWENTE.



HANDREIKINGEN VANUIT WISKUNDIG- DIDACTISCH ONDERZOEK: LOGARITMEN EN HET INPRODUCT

TOM COENEN EN MARK TIMMER





INHOUDSOPGAVE

WAT GAAN WE VANDAAG ALLEMAAL DOEN?

- **Logaritmen**
 - De setting
 - Geschiedenis van de logaritme
 - Didactische aspecten
 - Inleiding door herhaald leden
- **Het inproduct**
 - De setting
 - Wat is het inproduct
 - Bestaande aanpakken
 - Hoe dan wel?

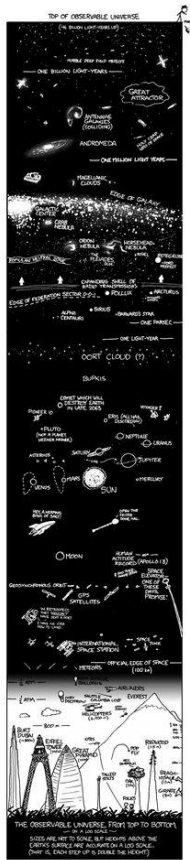
DE SETTING

HOE ZIJN WE TOT DEZE CONCLUSIES GEKOMEN?

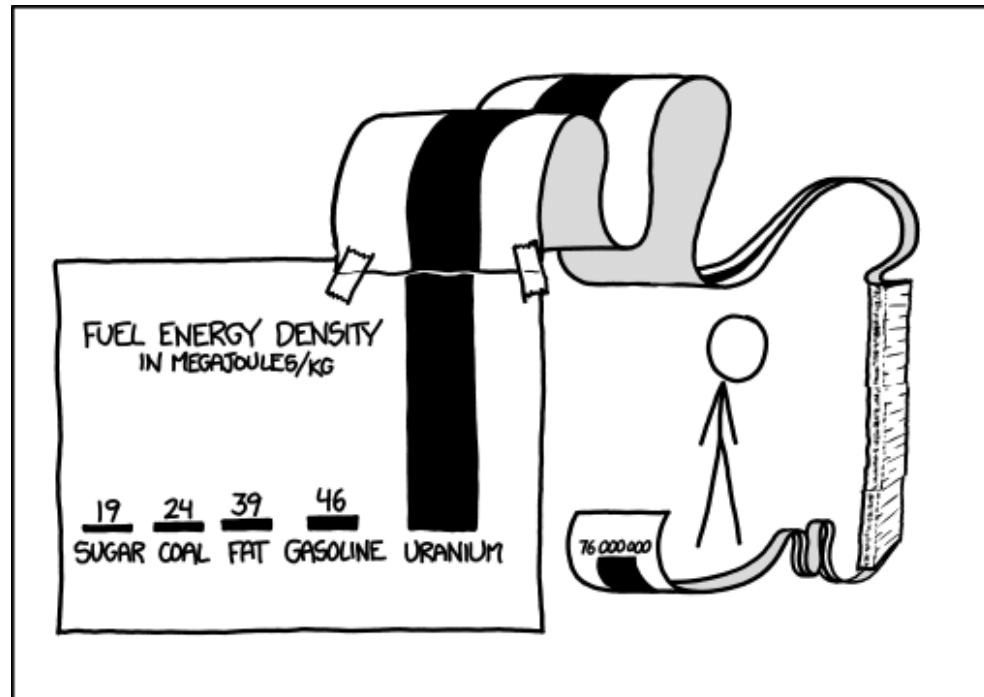
- **Lesson Study Team, Universiteit Twente**
 - Onder leiding van Nellie Verhoef
 - Samenwerking tussen:
 - Verscheidene wiskundedocenten
 - Vakdidacticus
 - Wiskundige

LOGARITMEN

... DE ZOEKTOCHT NAAR EEN DIDACTISCHE AANPAK



Een goed begin is het halve werk?



SCIENCE TIP: LOG SCALES ARE FOR QUITTERS WHO CAN'T FIND ENOUGH PAPER TO MAKE THEIR POINT PROPERLY.

DE SETTING

WAAR SPEELT ONS VERHAAL ZICH AF?

Subdomein Bg1: Standaardfuncties

16. De kandidaat kan grafieken tekenen en herkennen van machtsfuncties, exponentiële functies, logaritmische functies en goniometrische functies en van die verschillende typen functies de karakteristieke eigenschappen benoemen.

Subdomein Bg2: Standaardfuncties

7.7 de rekenregels voor machten en logaritmen (inclusief grondtalverandering) gebruiken.
7.8 gebruik maken van logaritmische schaalverdelingen.

Subdomein Bb2: Algebraïsche technieken (alleen bij wiskunde B)

10.3 bij het bepalen van de afgeleide van exponentiële en logaritmische functies het getal e en de natuurlijke logaritme gebruiken.

Parate vaardigheden: (havo wiskunde A)

3. een logaritmische schaalverdeling aflezen.

DE SETTING

WAAR SPEELT ONS VERHAAL ZICH AF?

		havo		vwo		
		wiA	wiB	wiC	wiA	wiB
Functies/verbanden	logaritmische functies		x	x	x	x
	logaritme		x	x	x	x
	natuurlijke logaritme				x	x
	logaritmische schaalverdeling	x	x	x	x	x

		havo		vwo		
		wiA	wiB	wiC	wiA	wiB
Algemene vaardigheden						
K. Formules opstellen	1. door variabelen te kiezen bij een probleemsituatie	x	x	x	x	x
	2. van standaardfuncties d. logaritmische functie		x		x	x
L. Expressies herkennen	1. vaststellen of een (deel)expressie behoort tot een van de volgende families					
	d. logaritmische functies		x	x	x	x

LOGARITMEN

WAAR KOMEN ZE VANDAAN?

Logarithms – making complex calculations easy



John Napier



John Wallis



Johann
Bernoulli



Jost Burgi

DE GESCHIEDENIS VAN DE LOGARITME

WAAR KOMT DE LOGARITME VANDAAN?

<i>index:</i>	n	0	1	2	3	...
<i>RR:</i>	L_n	a	$a + 1d$	$a + 2d$	$a + 3d$	...
<i>MR:</i>	N_n	c	$c \cdot r^1$	$c \cdot r^2$	$c \cdot r^3$	...

Kies nu $a = 0$, $d = 1$ en $c = 1$, dan

<i>index:</i>	n	0	1	2	3	...
<i>RR:</i>	L_n	0	1	2	3	...
<i>MR:</i>	N_n	1	r^1	r^2	r^3	...

Merk op dat de RR feitelijk de indexwaarden doorloopt.

DE GESCHIEDENIS VAN DE LOGARITME

WAAR KOMT DE LOGARITME VANDAAN?

<i>index:</i>	n	0	1	2	3	...
<i>RR:</i>	L_n	0	1	2	3	...
<i>MR:</i>	N_n	1	r^1	r^2	r^3	...

Stel je hebt twee getallen uit de MR N_k en N_l , dan zijn ook het product P en het quotiënt Q getallen uit deze rij, immers

$$P = N_k \cdot N_l = r^k \cdot r^l = r^{k+l}, \text{ en}$$

$$Q = \frac{N_k}{N_l} = \frac{r^k}{r^l} = r^{k-l}.$$

DE GESCHIEDENIS VAN DE LOGARITME

WAAR KOMT DE LOGARITME VANDAAN?

Voorbeeld:

$$P = 512 * 32 = ?$$

Neem een MR met $N_n = 2^n$ en gebruik een tabel met machten van 2.

Dan is in de RR af te lezen dat $k = 9$, $l = 5$
Zodat $k + l = 14$.

Via de tabel is in de MR nu

$$P = 16384 \text{ af te lezen!}$$

x	2^x
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1024
11	2048
12	4096
13	8192
14	16384
15	32768

DE GESCHIEDENIS VAN DE LOGARITME

WAAR KOMT DE LOGARITME VANDAAN?

Een DICHTE MR is nodig als je e.e.a wilt gebruiken voor praktische berekeningen.

$\Rightarrow$ *ENTREE NAPIER*

John Napier (1550-1617)

Idee n.a.w. rond 1594, publicatie 1614:

“Mirifici logarithmorum canonis descriptio”

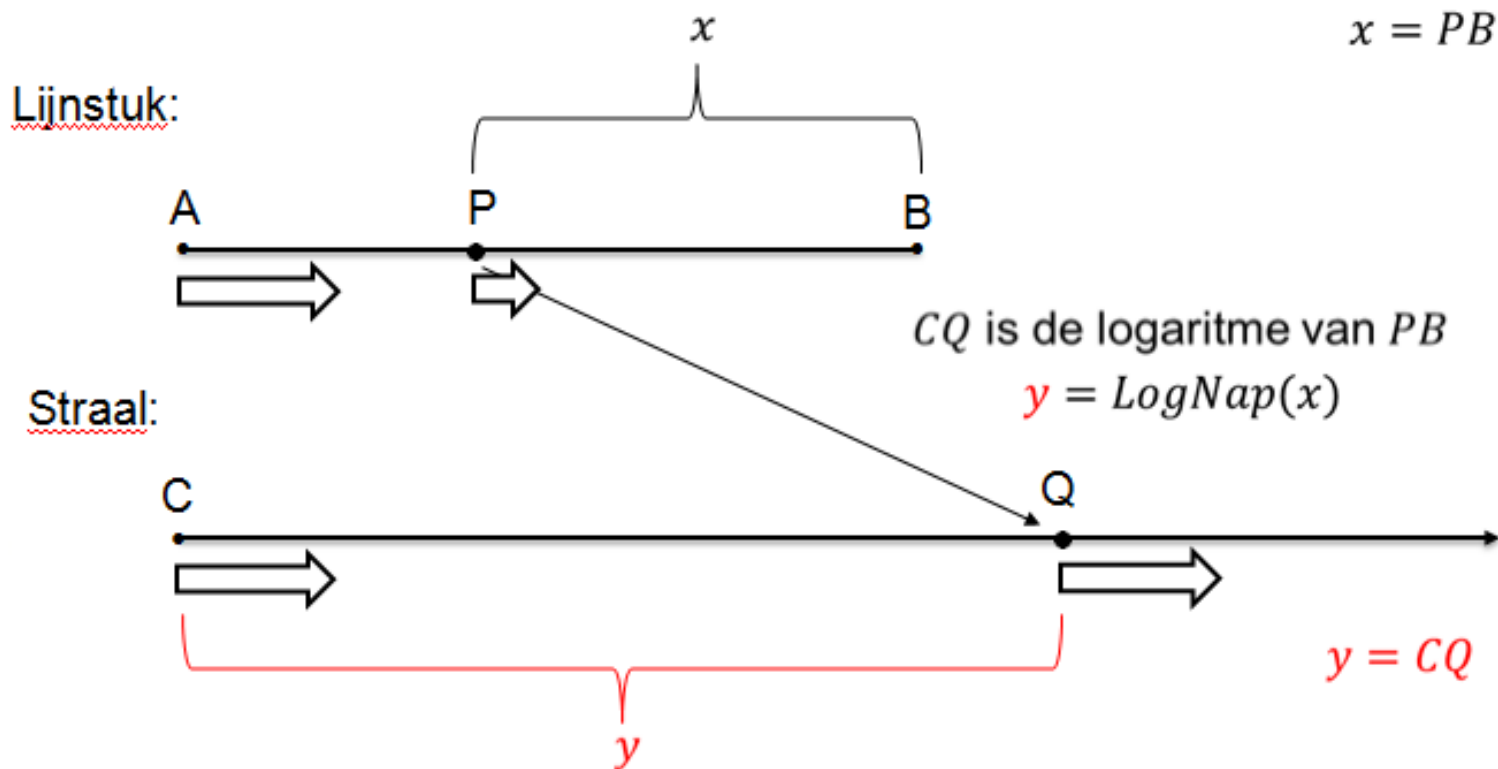
Keuze MR: $N = 10^7 \cdot \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L$

De bijbehorende waarde van de RR: $L = \text{LogNap}(N)$

DE GESCHIEDENIS VAN DE LOGARITME

WAAR KOMT DE LOGARITME VANDAAN?

Meetkundige uitleg / motivatie:



DE GESCHIEDENIS VAN DE LOGARITME

WAAR KOMT DE LOGARITME VANDAAN?

De naam “Logaritme”

Het getal (Grieks: arithmos) dat het aantal ratio's (Grieks: logos) telt (**ratio's-getal**).

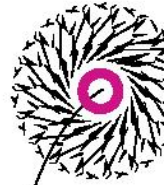
<i>index:</i>	n	0	1	2	3	...
<i>RR:</i>	L_n	0	1	2	3	...
<i>MR:</i>	N_n	1	$\widetilde{r}$ r^1	$\widetilde{r}$ r^2	$\widetilde{r}$ r^3	...

Ratio (de ‘reden’ van de MR): $\frac{N^{n+1}}{N^n} = r$



DIDACTISCHE ASPECTEN

... WAAR LOPEN LEERLINGEN TEGENAAN?



DIDACTISCHE ASPECTEN

WAAR LOPEN LEERLINGEN TEGENAAN?

Fasse zusammen und vereinfache möglichst weit:

$$2,5 \log(b) + q^2 \log(s) - q \log(st) =$$

$$2,5 \cdot \log(b) + q^2 \cdot \log(s) - q \cdot \log(st)$$

$$= \log(b^{2,5}) + \log(s^{q^2}) - \log(st^q) \quad | : \log$$

$$= \underline{\underline{b^{2,5} + s^{q^2} - st^q}}$$

Erstes Fehlermuster: Der Logarithmus als Objekt

Uit onderzoek (Weber, 2013)

DIDACTISCHE ASPECTEN

WAAR LOPEN LEERLINGEN TEGENAAN?

Fasse zusammen und vereinfache möglichst weit:

$$2,5 \log(b) + q^2 \log(s) - q \log(st) =$$

The image shows a student's handwritten work on a grid background. The student starts with the expression $\log b^{\frac{5}{2}} + \log s^{q^2} - \log(st)^q$. They then incorrectly apply the product rule for logarithms, writing $= \log b^{\frac{5}{2}} \cdot \log s^{q^2} - \log(st)^q$. Below this, they cross out $\log s^q \cdot \log st^q$ and write the final result as $= \log \left(\frac{\sqrt{b^5} \cdot s^q}{st^q} \right)$. The work demonstrates a common error where students treat the sum of logs as the log of a product.

Zweites Fehlermuster: Übergeneralisierung von Logarithmusgesetzen

Uit onderzoek (Weber, 2013)

DIDACTISCHE ASPECTEN

WAAR LOPEN LEERLINGEN TEGENAAN?

- **Wat zijn de mogelijke oorzaken van deze problemen?**
 - Het woord logaritme zegt niets
 - De schrijfwijze blokkeert
 - De definitie is indirect: geen handeling of meetkundige interpretatie

INLEIDING DOOR HERHAALD DELEN

HET LEGGEN VAN EEN GOEDE BASIS

Logaritme

Een betekenisvolle aanpak met herhaald delen

Pauline Vos, Børge Espedal

Euclides

December 2015

INLEIDING DOOR HERHAALD DELEN

HET LEGGEN VAN EEN GOEDE BASIS

Hoe bereken je ${}^2\log(128)$?

- Traditioneel:

$${}^2\log(128) = 7 \quad \text{want} \quad 2^7 = 128$$

- Nieuwe aanpak:

$$128 \rightarrow 64 \rightarrow 32 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$$

Dit zijn 7 stappen, dus ${}^2\log(128) = 7$.

“Herhaald delen totdat je bij 1 uitkomt”

INLEIDING DOOR HERHAALD DELEN

HET LEGGEN VAN EEN GOEDE BASIS

Hoe bereken je ${}^2\log(80)$?

- Traditioneel:

$$6 < {}^2\log(80) < 7 \quad \text{want} \quad \begin{array}{l} 2^6 = 64 \\ 2^7 = 128 \end{array}$$

- Nieuwe aanpak:

$$80 \rightarrow 40 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 2,5 \rightarrow 1,25 \rightarrow 0,625$$

Met 6 stappen ben ik er nog niet en met 7 ben ik te ver, dus $6 < {}^2\log(80) < 7$.

INLEIDING DOOR HERHAALD DELEN

HET LEGGEN VAN EEN GOEDE BASIS

Hoe bereken je ${}^a\log(b)$?

Dus: het aantal stappen dat nodig is om bij 1 uit te komen als je b telkens door a deelt.

Analogie:

- a^b : het getal 1 herhaald vermenigvuldigen met a (ik weet hoe vaak, b keer, en zoek het resultaat)
- ${}^a\log(b)$: het getal b herhaald delen door a (ik weet het resultaat, 1, en zoek hoe vaak)

INLEIDING DOOR HERHAALD DELEN

HET LEGGEN VAN EEN GOEDE BASIS

Waar werkt dit voor?

- Wat is $^{10}\log(1000)$?
- Wat is $^{10}\log(10^n)$? Of zelfs: wat is $^a\log(a^n)$?
- Wat is $^a\log(1)$? Wat is $^a\log(a)$?
- Los op: $^{10}\log(x) = 5$
- Als je $^{10}\log(8)$ weet, wat is dan $^{10}\log(800)$?

Dit alles kan eenvoudig beredeneerd worden op basis van de definitie via herhaald delen.

INLEIDING DOOR HERHAALD DELEN

HET LEGGEN VAN EEN GOEDE BASIS

Waar werkt dit **niet** voor?

- Wat is ${}^4\log(1100)$?

$$1100 \rightarrow 275 \rightarrow 68,75 \rightarrow 17,1875 \rightarrow 4,296875 \\ \rightarrow 1,07421875 \rightarrow 0,2685546875$$

$$\text{Dus } 5 < {}^4\log(1100) < 6.$$

Of liever als breuken?

$$1100 \rightarrow \frac{1100}{4} \rightarrow \frac{1100}{16} \rightarrow \frac{1100}{64} \rightarrow \frac{1100}{256} \rightarrow \frac{1100}{1024} \rightarrow \frac{1100}{4096}$$

Maar ja, nu doe ik eigenlijk niks anders dan de traditionele aanpak van herhaald vermenigvuldigen

INLEIDING DOOR HERHAALD DELEN

HET LEGGEN VAN EEN GOEDE BASIS

Waar werkt dit **niet** voor?

- ${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(ab)$?
- ${}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right)$?
- Los op: $2^x = 100$.

Plus nog de vraag: waarom zou je zo'n concept definiëren?

CONCLUSIE

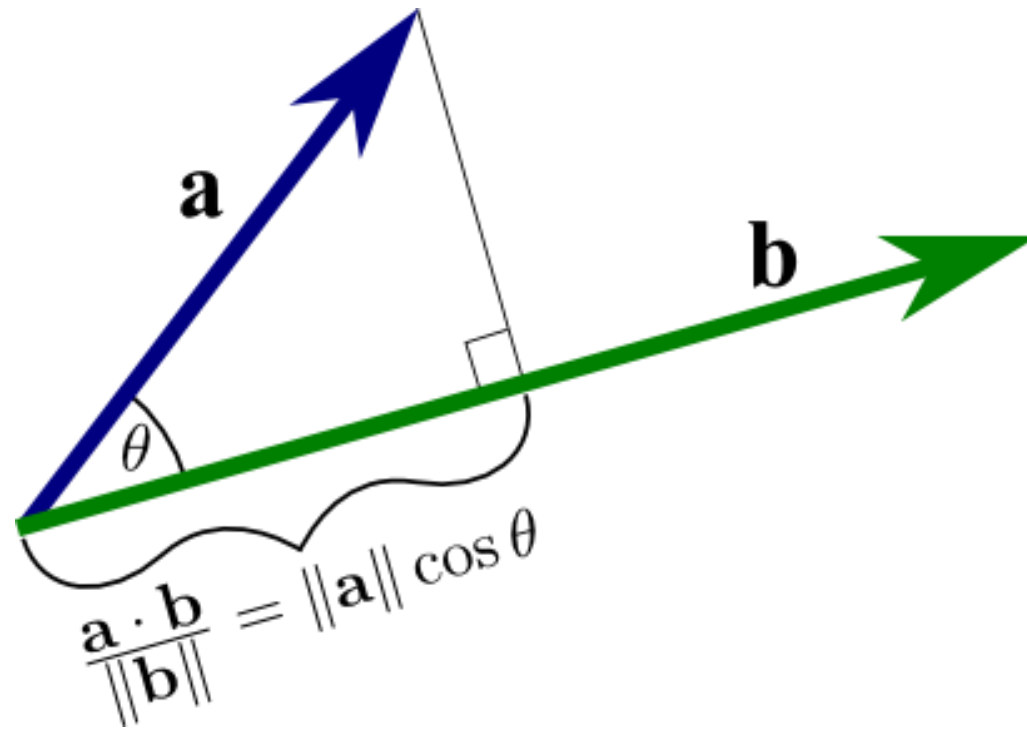
WAT WILLEN WE U MEEGEVEN?

- Het introduceren van de logaritme is nog niet zo eenvoudig
- Er zijn een aantal aandachtspunten die belangrijk zijn om de materie soepel aan te bieden:
 - Kijk eens terug naar de geschiedenis
 - Werk met nonvoorbeelden
 - Probeer intuïtie aan te brengen voor de grootte van een logaritme



HET INPRODUCT

... HOE INTRODUCEER JE DAT AAN LEERLINGEN?



DE SETTING

WAAR SPEELT ONS VERHAAL ZICH AF?

VWO Wiskunde B: Analytische meetkunde

Subdomein E3: Vectoren en inproduct

16. De kandidaat kan met behulp van vectoren en inproducten eigenschappen van figuren in het vlak afleiden en berekeningen uitvoeren.

Parate kennis. De kandidaat kent:

- het begrip inproduct (of inwendig product) van twee vectoren als
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\theta)$$

Parate vaardigheden. De kandidaat kan:

- het inproduct gebruiken voor de berekening van hoeken en afstanden

WAT IS HET INPRODUCT?

WISKUNDIGE DEFINITIES

Gegeven twee vectoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

is het inproduct $\vec{a} \cdot \vec{b}$ gedefinieerd als:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$ (algebraïsch)
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$ (meetkundig)

Deze definities zijn equivalent

WAT IS HET INPRODUCT?

DE ALGEBRAÏSCHE DEFINITIE

Gegeven twee vectoren

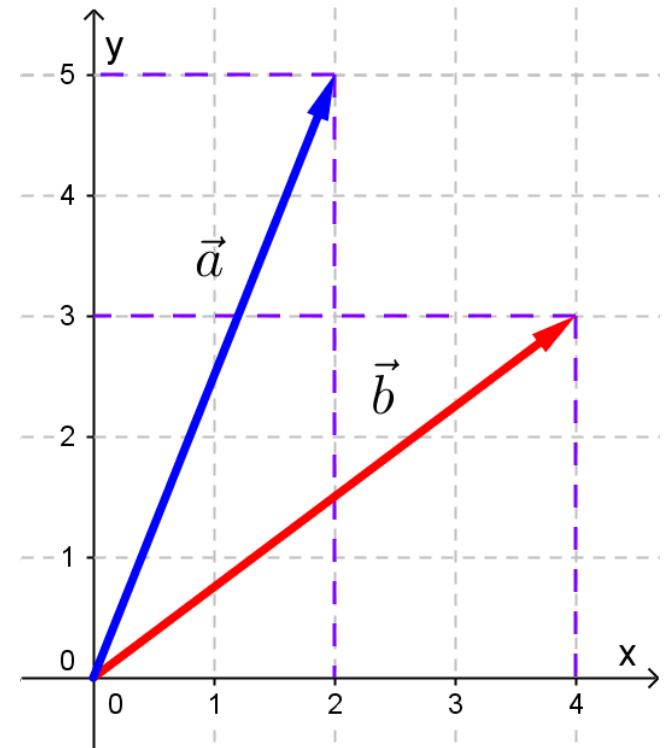
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

is het inproduct $\vec{a} \cdot \vec{b}$ gedefinieerd als:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 4 + 5 \cdot 3 = 23$

Kan je je iets **voorstellen** bij deze definitie?



WAT IS HET INPRODUCT?

DE MEETKUNDIGE DEFINITIE

Gegeven twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$, met

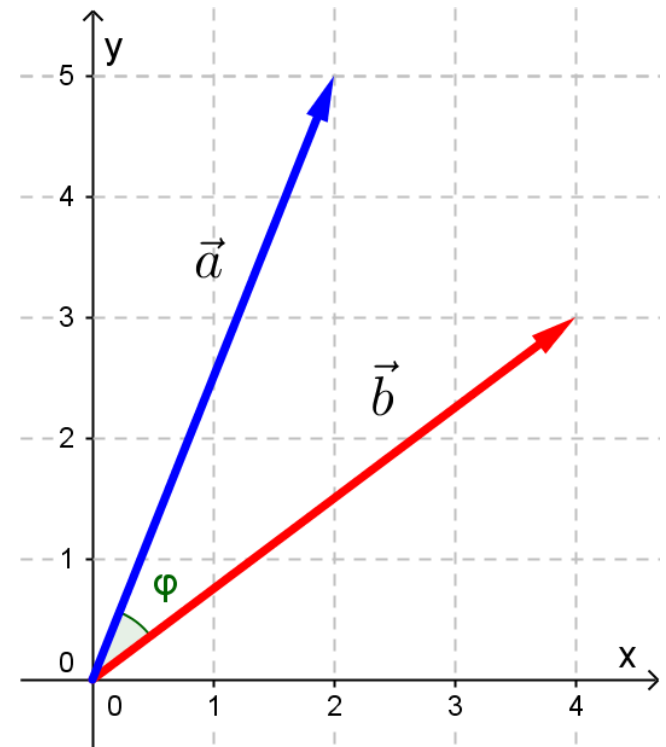
$$|\vec{a}| = \sqrt{29}$$

$$|\vec{b}| = 5$$

$$\varphi \approx 31,3 \dots^\circ,$$

is het inproduct $\vec{a} \cdot \vec{b}$ gedefinieerd als:

- $$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi) = \\ &= \sqrt{29} \cdot 5 \cdot \cos(31,3 \dots) = 23\end{aligned}$$



Kan je je iets **voorstellen** bij deze definitie?

BESTAANDE AANPAKKEN

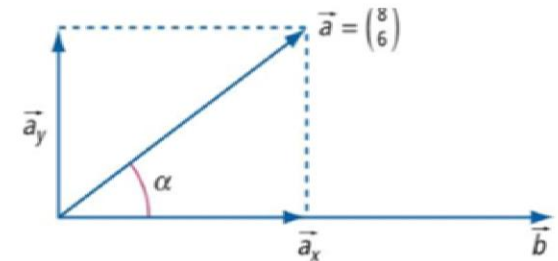
HOE WORDT HET GEÏNTRODUCEERD OP SCHOOL?

- **Moderne Wiskunde, vwo 4, Wiskunde B:**

- 23** Een wagentje wordt aan een touw over een horizontale weg verplaatst over de vector $\vec{b} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix}$. De kracht waarmee dit gebeurt wordt gegeven door de vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$. De vectoren

$\vec{a}$ en $\vec{b}$ maken de hoek α met elkaar. Alleen de horizontale component $\vec{a}_x$ van $\vec{a}$ draagt bij aan de voortbeweging.

- a** Geef de kentallen van de vectoren $\vec{a}_x$ en $\vec{a}_y$.
- b** De arbeid die je moet verrichten om het wagentje over de vector $\vec{b}$ te verplaatsen bereken je met het product: *kracht in de richting van de weg $\times$ afgelegde weg*.
Leg uit dat de arbeid in de gegeven situatie gelijk is aan $|\vec{a}_x| \cdot |\vec{b}|$ en bereken deze arbeid.
- c** Ook als je de kentallen van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ niet kent kun je een uitdrukking vinden voor de arbeid.
Leg uit dat $|\vec{a}_x| = |\vec{a}| \cdot \cos(\alpha)$ en dat de arbeid gelijk is aan $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$.



BESTAANDE AANPAKKEN

HOE WORDT HET GEÏNTRODUCÉERD OP SCHOOL?

- **Moderne Wiskunde, vwo 4, Wiskunde B:**
- Samenvattend: *“Het inproduct van $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is de benodigde arbeid om iets over een weg $\vec{b}$ te verplaatsen als je de kracht uitoefent gegeven door $\vec{a}$.”*
- Nadelen aan deze definitie:
 - We moeten wel veel van natuurkunde snappen om een wiskundige definitie te begrijpen die slechts gaat over abstracte objecten
 - De definitie is erg asymmetrisch qua interpretatie van de vectoren
 - En: als de kracht niet in de richting van de weg wijst krijg je een negatieve arbeid – dat is ook wel wat vreemd
 - Je wil uiteindelijk wellicht niet dat leerlingen altijd aan arbeid denken als het over het inproduct gaat – dat wekt wellicht verwarring in een context waarin het niet over krachten gaat

BESTAANDE AANPAKKEN

ALTERNATIEVE INTRODUCTIES

- **Generalisatie van vermenigvuldiging (via ontbinding):**
 - Ontbinden in componenten en herleiden:
 - $\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}_x + \vec{a}_y) \cdot (\vec{b}_x + \vec{b}_y) = \vec{a}_x \cdot \vec{b}_x + \vec{a}_x \cdot \vec{b}_y + \vec{a}_y \cdot \vec{b}_x + \vec{a}_y \cdot \vec{b}_y$
 - Benodigde aannames / afspraken:
 - Distributiviteit van vermenigvuldiging
 - $\vec{a}_x \cdot \vec{b}_x = |a_x| \cdot |b_x|$
 - $\vec{a}_x \cdot \vec{b}_y = 0$
 - Conclusie:
 - $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$
- Nadelen aan deze definitie:
 - Wel veel aannames. En: wat is de intuïtie? Wat betekent het getal?

BESTAANDE AANPAKKEN

ALTERNATIEVE INTRODUCTIES

- **Via “overeenkomstigheid”**
 - “Het inproduct is een getal dat aangeeft in welke mate twee vectoren ‘overeenkomstig’ zijn”
 - Wat is overeenkomstig?
 - Precies dezelfde kant op: 1, precies de andere kant op: -1
 - Loodrecht op elkaar: 0
 - Welke wiskundige functie heeft deze eigenschappen?
 - $\cos(0^\circ) = 1$ $\cos(180^\circ) = -1$ $\cos(90^\circ) = 0$
 - Dus, je zou kunnen concluderen: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos(\varphi)$.
- Nadelen aan deze definitie:
 - Het verklaart niet waarom de lengten van de vectoren ertoe doen

HOE DAN WEL?



HOE DAN WEL?

HOE ZORG JE DAT LEERLINGEN NIET IN VERWARRING RAKEN?

- **Onze overtuiging**

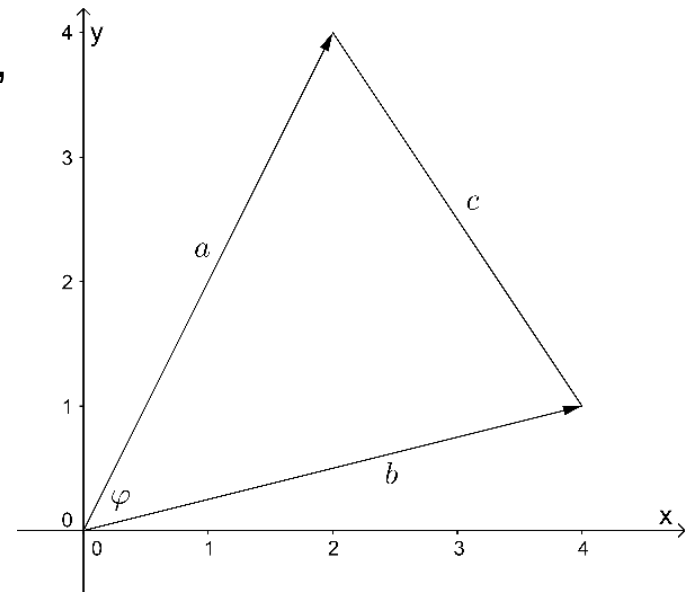
- Begin met het wiskundige probleem dat je wilt oplossen (een hoek bepalen van twee vectoren / checken of die loodrecht is)
- Laat zien dat het inproduct handig van pas komt als onderdeel van de oplossing
- *Zo voorkom je dat je een concept introduceert wat voor leerlingen betekenisloos is (terwijl het pretendeert dat niet te zijn).*

HOE DAN WEL?

HOE ZORG JE DAT LEERLINGEN NIET IN VERWARRING RAKEN?

- **Aanpak**

- Gegeven zijn twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$, hiernaast getekend in een assenstelsel. We zoeken hoek φ .
- De cosinusregel zegt:
 - $a^2 + b^2 - 2ab \cos(\varphi) = c^2$
 - $\cos(\varphi) = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab}$
- Pythagoras vertelt ons:
 - $c = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$
- Substitutie en herleiden levert:
 - $\cos(\varphi) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{ab} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$



HOE DAN WEL?

HOE ZORG JE DAT LEERLINGEN NIET IN VERWARRING RAKEN?

- **Aanpak**

- We hebben nu dus gevonden:

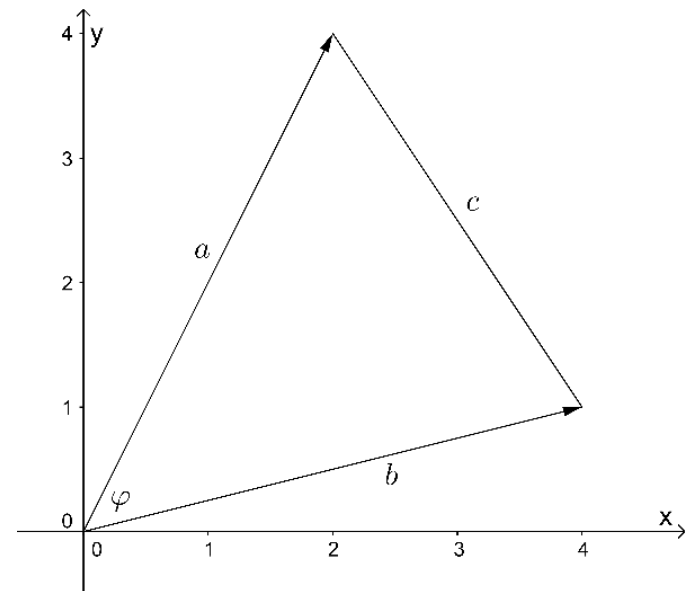
- $\cos(\varphi) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

- Vaak is interessant om te weten of al dan niet $\varphi = 90^\circ$:

- $\cos(90^\circ) = 0$

- $\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = 0$

- $a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$



- Die expressie $a_1 b_1 + a_2 b_2$ is dus handig, laten we die een naam en notatie geven: het *inproduct* van $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$.

HOE DAN WEL?

HOE ZORG JE DAT LEERLINGEN NIET IN VERWARRING RAKEN?

- **Aanpak**
 - We hebben nu dus gevonden:
 - $\cos(\varphi) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$
 - We hebben gedefinieerd:
 - $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$
 - **Er volgt nu direct:**
 - $\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos(\varphi) \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

HOE DAN WEL?

ERVARINGEN IN DE KLAS

- **Een eerdere poging (o.b.v. generalisatie van vermenigvuldiging):**
 - Leerlingen: “wat betekent het nu eigenlijk als het inproduct bijvoorbeeld 3 is?”
- **Een eerste poging van onze aanpak:**
 - Leerlingen zijn niet in de war betreffende de betekenis van het inproduct
 - Leerlingen hadden wel moeite met de verschillen tussen de concepten $\vec{a}$, a en $|\vec{a}|$. Goed aandacht aan besteden!
 - Leerlingen vroegen (terecht) waarom we in de vergelijking $\cos(\varphi) = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab}$ alleen de teller herleiden.
 - Een enkeling kwam met het idee om de hoek te bepalen via de tangens – prima uiteraard, maar op termijn minder handig

CONCLUSIE

WAT WILLEN WE U MEEGEVEN?

- Onze aanpak lijkt een natuurlijke manier om tot de definitie van het inproduct te komen.
- Er zijn een aantal aandachtspunten die belangrijk zijn om de materie soepel aan te bieden
 - Leg uit waarom je op enig moment voor het gemak even overstapt van $|\vec{a}|$ op a (of blijf bij dezelfde notatie)
 - Leg uit waarom je niet gewoon de hoeken van de vectoren bepaalt met de inverse tangens en die van elkaar afhaalt
 - Maak aannemelijk waarom je alleen de teller herleidt als we zijn aangekomen bij $\cos(\varphi) = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab}$: je wilt de c wegwerken en het blijkt dat het eenvoudiger wordt als we de a en b uit uitvouwen

CONCLUSIE

WAT WILLEN WE U MEEGEVEN?

- We zijn benieuwd naar uw ervaringen!
- Reacties zijn altijd welkom op
 - m.timmer@utwente.nl
 - t.j.m.coenen@utwente.nl